

# 11: ELECTROSTÀTICA

## \* CÀRREGUES

$$Q = Ne^-$$

$N$ : Num  $e^-$ ,  $e^- = 1.602 \cdot 10^{-19} C$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 N m^2 / C^2$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$$

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Moment elèctric dipol

$$\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_p = rF \sin \alpha$$

$M_p$ : Moment d'una força; Si  $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{M}_p$  independent del punt.

- Distribució de càrregues

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

## \* VECTOR INTENSITAT DE CAMP ELÈCTRIC ( $\vec{E}$ )

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{r^2} \hat{e}_r = \int k \frac{dq}{r^2} \hat{e}_r$$

$$E = 2k \frac{\lambda}{r} \text{ Fil indefinit}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ Pla indefinit}$$

## \* FLUX DEL CAMP ELÈCTRIC ( $\Phi$ ) Llei de Gauss

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES' = ES \cos \alpha = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$= ES \cos \alpha = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$\vec{S}$ : Vector  $S$ =Area sup

direcció  $\perp$  sup, cap a fora

$\Phi > 0 \Rightarrow$  Flux sortint;  $\Phi < 0 \Rightarrow$  Flux entrant

Llei Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

$$= \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

$V$ : Volum on hi ha càrrega

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

si  $\vec{E}$  electrostàtic

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

## 12: POTENCIAL I ENERGIA

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

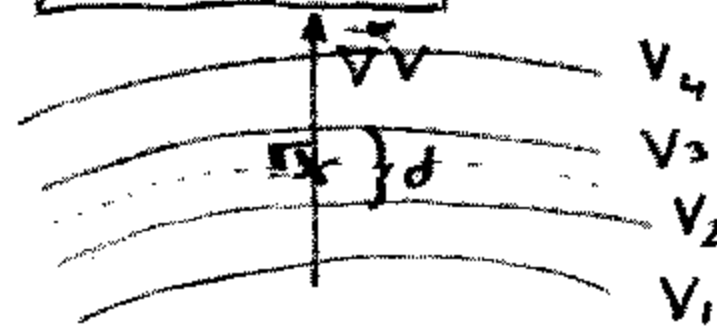
$V(A) > V(B) > 0$  El treball el fa el camp  
 $< 0$  Treball contra el camp.

que fa el camp

$$W = q[V(A) - V(B)]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -(E_x, E_y, E_z)$$

$$|\vec{\nabla} V| = \frac{dV}{dn} \approx \frac{V_3 - V_2}{d}$$



$$V(B) - V(\infty) = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{r};$$

$$V = \int k \frac{dq}{r}$$

$$V = E \cdot d$$

## \* ENERGIA DE FORMACIÓ D'UN SISTEMA DE CÀRREGUES

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

$$V_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N k \frac{q_k}{r_{ki}}$$

## \* DENSITAT D'ENERGIA D'UN CAMP ELÈCTRIC ( $\eta_E$ )

$$\eta_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{dU}{dV} \Rightarrow U = \int_V \eta_E dV$$

V: Volum on  $\vec{E} \neq 0$   
 $U = W$

## 13: CAMP ELÈCTRIC EN CONDUCTORS

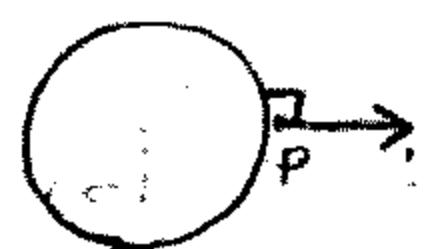
### \* CONDUCTORS EN EQUILIBRI ELECTROSTÀTIC ( $E_{int} = 0$ )

- El camp elèctric total en un conductor és sempre 0, ja que els electrons es distribueixen de forma que contraresten els camps que actuen.

#### • Propietats d'un conductor en equilibri electrostàtic

1)  $V(A) - V(B) = 0 \Rightarrow$  Potencial constant a tot el volum

2) La càrrega s'acumula a la superfície

3)   $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (Només infinitament a prop de la sup)

4)  $\sigma$  major a les "punxes" que pugui presentar el conductor.

#### • Conductor amb cavitat interior

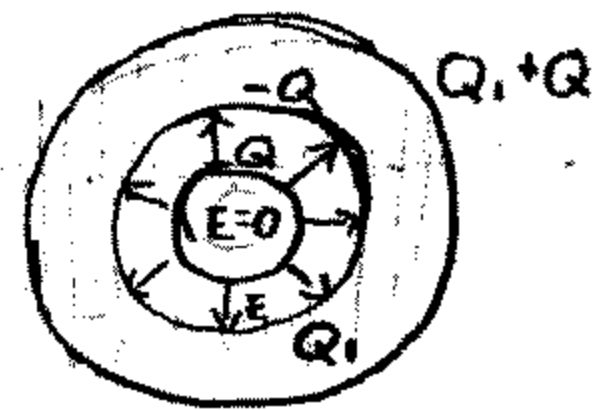
- la càrrega s'acumula a la sup. exterior.

### \* FENOMENS D'INFLUÈNCIA

Redistribució de càrregues degut a la presència d'altres conductors carregats.

#### Influència total:

Totes les línies de camp d'un atravessen l'altre.



### \* CAPACITAT, CONDENSADORS

$$C = \frac{Q}{V}$$

Condensador: Dos conductors en influència total.

Rigidessa dielèctrica: Màx d.d.p que pot suportar el condensador.

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$
 Condensador Pla

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$
 Esfèric

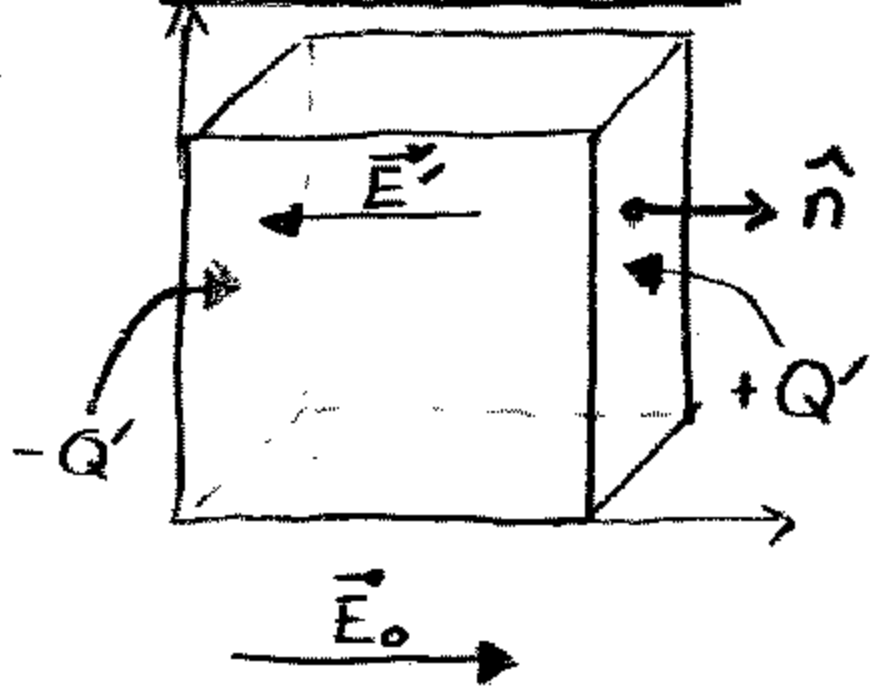
$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$
 Cilíndric

$$U = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2)$$

Càrrega emmagatzemada en un condensador.

$$V = E \cdot d$$

# T4: DIELECTRICS



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$Q'$ : Càrrega lligada

$\sigma'$ : Distriv. sup. de càrrega lligada

$\hat{n}$ : definida per l'orientació dels dipòls

$\chi$ : Susceptibilitat del dielèctric

$\vec{D}$ : Vector desplaçament elèctric

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (4) \quad \rho' = -\text{div } \vec{P}$$

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Dielectrics lineals ( $\vec{P} \propto \vec{E}$ ):  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$   $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  (2)

$$\textcircled{1} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\textcircled{2} \int_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad \epsilon = \text{cte} \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$$

## \* Condensador amb dielèctric

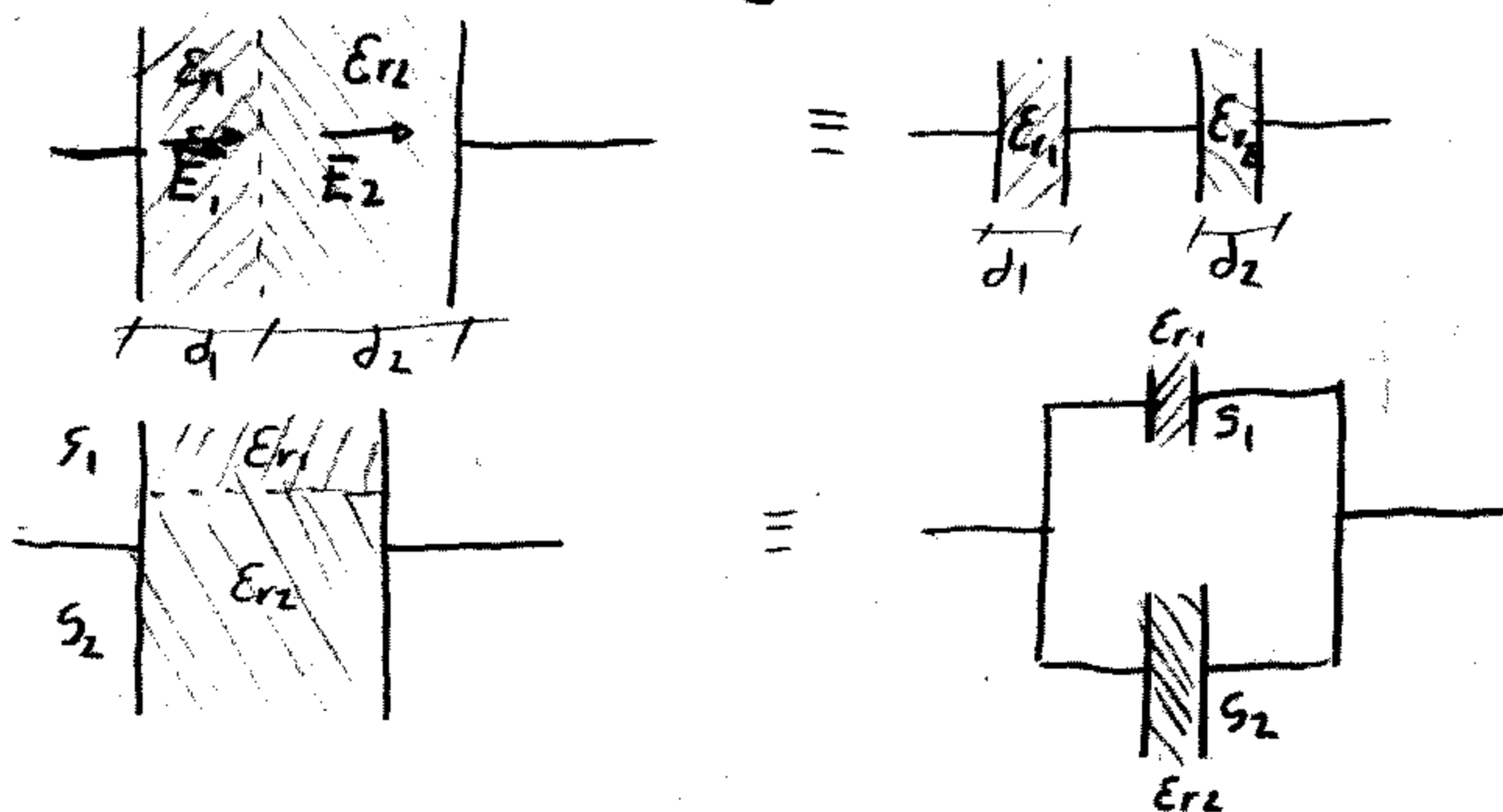
$$\vec{D} = \sigma \hat{i} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \Rightarrow C = \epsilon_r C_0 \Rightarrow \vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma \hat{i} \Rightarrow \sigma_{\text{ligada}} = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) \sigma \quad [\dots]$$

## \* SUPERFÍCIE DE SEPARACIÓ DE DOS MEDIS

$$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma \quad \text{per } \sigma = 0 \Rightarrow \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$\tan \psi_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \psi_2$$

## - Condensadors amb diferents dielèctrics



# 15.- CORRENT ELÈCTRIC

$$I = \frac{dq}{dt} = n v S q = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$n$ : portadors de càrrega per unit. Vol.

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad \text{: densitat de corrent}$$

\* Conservació de la càrrega, Eq de continuïtat

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ(t)}{dt}$$

$Q(t)$ : càrrega continguda al volum

$$\text{div } \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{distr. volum corra}$$

$$\text{Si } \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0; - \frac{dQ(t)}{dt} = 0; \text{div } \vec{j} = 0$$

No s'acumula càrrega  $\Rightarrow$  Llei de Kirchoff

\* Llei d'Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$ : Conductivitat del material

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ : Resistivitat del material

- Conductor en forma de fil

$$\frac{V_A - V_B}{I} = \frac{l}{\sigma S}$$

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}$$

$R$ : Resistència

$G = \frac{1}{R}$ : Conductància

\* Energia dels circuits elèctrics

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P_v = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$P = \int_V P_v dV$$

$P_v$ : Pot. per unit. de vol.

\* form. general per tot conductor

- Conductor en forma de fil

$$P = (V_A - V_B) I = I^2 R$$

$$W = \int_{t_0}^t P dt = I^2 R \Delta t$$

$$Q = 0.24 I^2 R \Delta t$$

\* Dependència de la conductivitat amb la temperatura

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

$\alpha$ : coef. de temperatura

\* Models de conducció en sòlids

$$\vec{v}_d = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

$$\mu = \frac{q\tau}{m}$$

$$\tau = \frac{\sigma m}{nq}$$

$\tau$ : temps mig entre col·lisions

$\mu$ : mobilitat de l'electró

o Establiment del corrent

$$v(t) = \frac{q\tau}{m} E (1 - e^{-t/\tau})$$

$t = 4\tau \rightarrow v(t) \approx v_d$

o Tall del corrent

$$v(t) = \frac{q\tau}{m} E e^{-t/\tau}$$

# TEMA 1: CAMP MAGNÈTIC

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

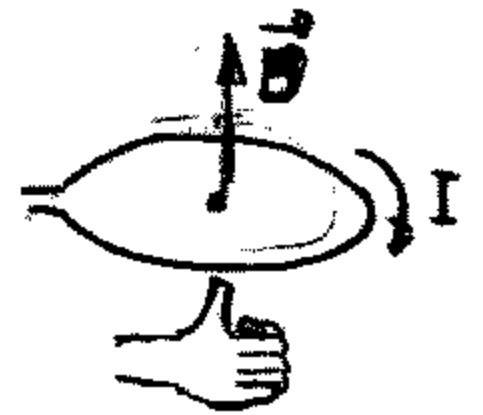
$$\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (F \text{ sobre un conductor})$$

- Efectes del camp magnètic sobre una espira

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

$\vec{m}$ : moment magnètic de l'espira



A una bobina o solenoide

$$\vec{m} = N I \vec{S}$$

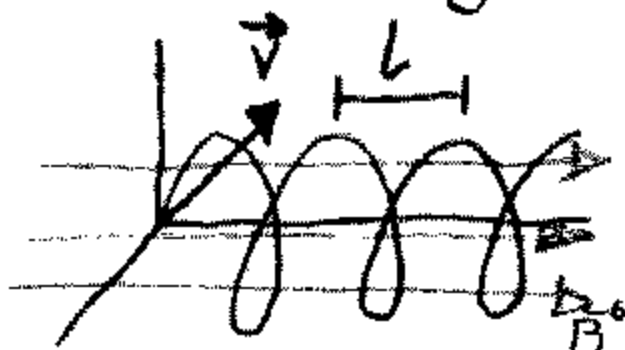
- Moviment d'una càrrega en un camp magnètic

$$R = \frac{m v}{q B}$$

$$T = 2\pi \frac{m}{q B}$$

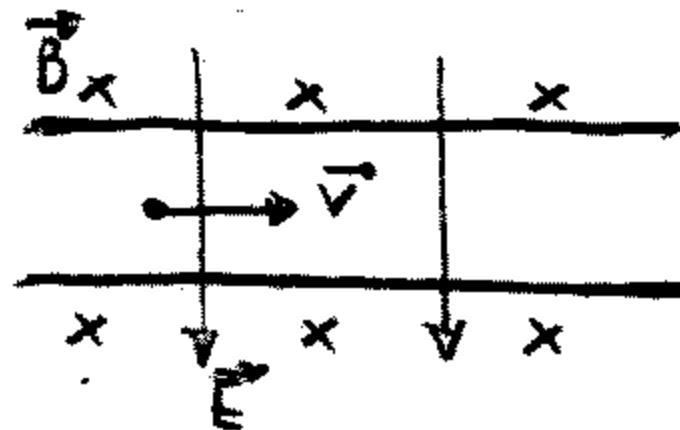


\* velocitat angle arbitrari



$$L = v_{\parallel} T$$

\* Selector de velocitats



$$v = \frac{E}{B}$$

\* Ciclotró

$$\omega = \frac{q B}{m} \quad (F_b = F)$$

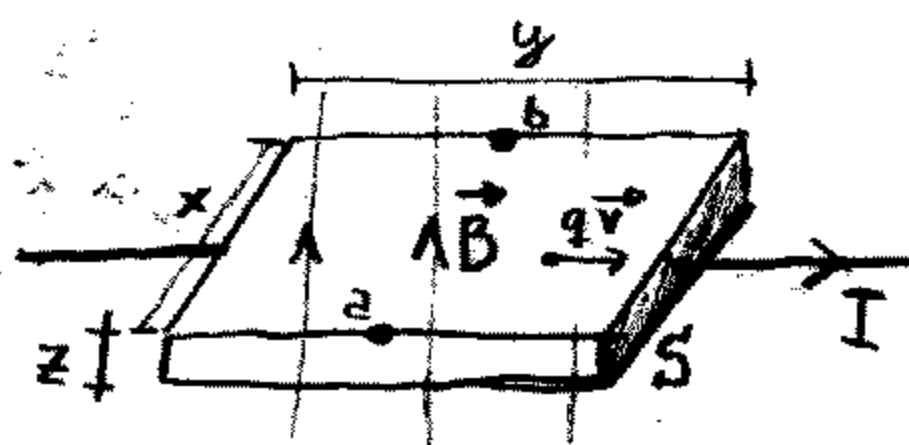
$$W = 2 N q V = \frac{1}{2} m (v_s^2 - v_0^2)$$

- Efecte Hall

$$\frac{F}{q} = \frac{E v}{q}$$

$$V_H = V(a) - V(b) = E(a-b) = B v(a-b)$$

$$V_H = B v(a-b) = \frac{I}{n q S} (a-b) B$$



$$I = n q v S \Rightarrow$$

$$v = \frac{I}{n q S}$$

# TEMA 2: FONTS DEL CAMP MAGNÈTIC

- Camp creat per un corrent

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

- Camp creat per una càrrega puntual

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

- Fil finit

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} (\sin \theta_2 + \sin \theta_1)$$



- Fil infinit

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} \vec{r}^{\perp}$$

- Espira

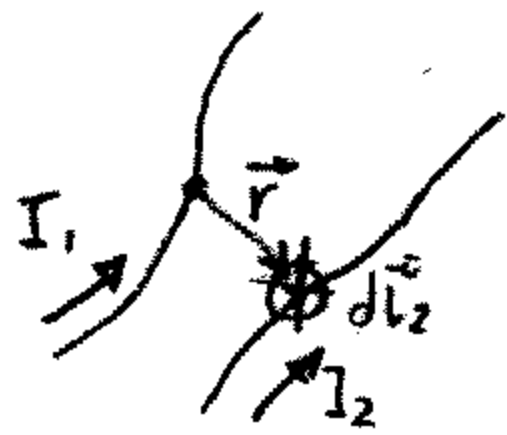
$$B_{eix} = \frac{\mu_0}{2} \cdot I \cdot \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

al centre (d=0)

$$\downarrow = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{R}$$

$$B_{eix} = N \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{Solenoide}) \text{ (a l'interior)}$$

- Forces entre corrents



$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times I_1 d\vec{B}_1$$

$$\frac{F_{21}}{l_2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 \cdot I_2}{r}$$

Amper: Corrent que ha de circular per dos conductors paral·lels separats 1m, pq s'exerceixin una força de  $2 \cdot 10^{-7} N$

- llei de Gauss per al magnetisme

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

S plana  
B uniforme }  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$   
 $\Phi = BS \cos \alpha$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

- Llei d'Ampere

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

C: camí tancat  
I: Intensitat que atravesi qualsevol sup. que tingui per contorn el camí C.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{NI}{r}$$

camp creat solenoide toroidal

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

solenoide recte

- Llei d'Ampere - Maxwell

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d)$$

En forma integral

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En forma diferencial

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

13: INDUCCIÓ ELECTROMAGNÈTICA

- f.e.m.i llei de Lenz-Faraday

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

f.e.m.i espiral

$$\mathcal{E}(t) = BS\omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En forma diferencial

- Inducció mutua i autoinducció

$$L_i = \frac{\Phi_i}{I_i}$$

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

Solenoide recte indefinit

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

- Densitat d'energia

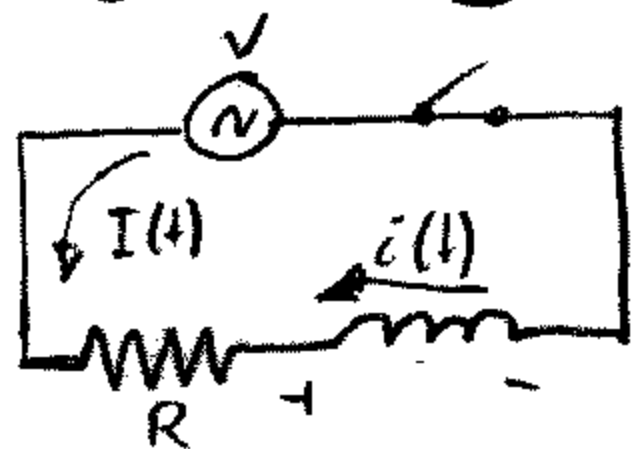
$$\eta_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\eta_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\eta = \eta_E + \eta_B$$

$$U = \int_V \eta dV$$

## - Energia Magnètica



$$\Phi_2 = M I_1 + L I_2 \Rightarrow \frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} + L \frac{dI_2}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - L \frac{dI_2}{dt}}$$

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2} L \cdot I^2(t)}$$

## \* UNITAT 3 : ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

Compleixen l'equació:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

$\psi(x,t)$  funció d'ona

### \* Ones harmòniques

$$\boxed{\psi(x,t) = A \sin(kx \mp \omega t)}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

$$\boxed{\omega = kc}$$

Relació de dispersió

$$\boxed{c = f\lambda}$$

velocitat de propagació

$$* \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

$$\vec{E}_y = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j}$$

$$\vec{B}_z = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t) \hat{k}$$

### \* Energia de les ones electromagnètiques

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$$

$|\vec{S}|$ : Intensitat que propaga l'ona  
 $\arg(\vec{S})$ : direcció propagació de l'ona

Vector de Poynting