TEMA 1

* PROPIETATS FONAMENTALS DELS NOMBRES REALS

- $(\mathbb{R},+)$ Grup conmutatiu:
  - Prop Asociativa, distributiva, elem. neutre, oposat.
- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ Anell conmutatiu:
  - Prop Associativa, distributiva, distrib respecte suma, elem. neutre.
- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ Cos conmutatiu: elem. oposat
  - $(\mathbb{R},\cdot)$ Grup conmutatiu
- $(\mathbb{R})$ Conjunt totalment ordenat: relacions d'ordre
- $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ Cos ordenat
- $(\mathbb{R},+,\cdot\ \leq)$ Cos ordenat arquimedià: Prop. Arquimed.
- " " Cos ordenat arquimedià complet:
  - $A\subset\mathbb{R},\ A\neq\emptyset\ ;\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ //\ \alpha=\sup A$

* VALOR ABSOLUT

$|x|\geq 0$

$|xy|=|x||y|$

$|x+y|\leq|x|+|y|$

$|x|<r \iff -r<x<r$

$||x|-|y||\leq|x-y|$

$$\boxed{|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0\\ -a & \text{si } a\leq 0\end{cases}}$$

* SUCCESSIONS

- Lema del Sandwitch $(a_n)\leq(b_n)\leq(c_n) \Rightarrow (b_n)\to L$

  L

- Successions de Cauchy

  $$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ /\ \forall m>n_0,\ |a_{n_0}-a_m|<\varepsilon}$$

  SUCC. CAUCHY $\iff$ CONVERGENT (fals en $\mathbb{Q}$)

- Todo conjunto acotado inf/sup tiene extremo inf/sup. " "
- Cualquier sucesión de intervalos encajados, tiene un elemento en la intersección.

▶ Són equivalentes, un cuerpo es completo si las cumple.

* LIMITES DE SUCESIONES

- Si $(a_n) \to L$

$$A_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n} \to L$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} \to L$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}} \to L$$

$$\boxed{H \leq G \leq A}$$

- $\boxed{\left((a_n)^{b_n}\right) \to e^{b_n(a_n-1)}}$ $a_n \to 1$; $b_n \to \infty$

- $\boxed{\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)}$ $\boxed{\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}}$ $\boxed{n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

TEMA 2:

* PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

- Injectiva : $f(a) \neq f(b) \Leftrightarrow a \neq b$
- Exaustiva : $A \xrightarrow{f} B \mid \forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

} bijectiva

* CONTINUITAT

- Una funció és continua si $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ i coincideix amb $f(a), \forall a$
- TEOREMA BOLZANO

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$
f continua ;
$f(a) \cdot f(b) < 0$ /

$\exists\, \xi$ (almenos 1) $\in (a,b)$
tq $f(\xi) = 0$

- TEOREMA DE WEIERSTRASS

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua
f tiene máximo y mínimo
$f:[a,b] \to [m, M]$ /

$\exists\, \beta \in [a,b] / f(\beta) = M$
$\exists\, \alpha$ " " $/ f(\alpha) = m$

* La image d'una funció continua, en un interval tancat és tb un interval tancat.

* DERIVACIÓ

- Una funció és derivable, si $\forall x \ \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- Derivada de la funció inversa : $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$
- $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

TEMA 3

- TEOREMA DE ROLLE

$f[a,b] \to \mathbb{R}$
continua $[a,b]$, derivable (a,b)
$f(a) = f(b)$

$\boxed{\exists \xi \in (a,b) \ / \ f'(\xi) = 0}$

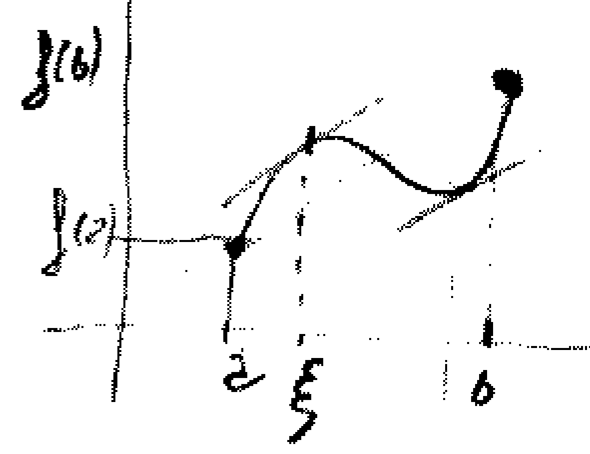
- f te extrems relatius allà on $f'(x) = 0$

- TEOREMA DE CAUCHY

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$
f, g continues en $[a,b]$
$g(a) \neq g(b)$
f', g' no se anulan a la vez

$$\boxed{\exists \xi \in [a,b] \ tq \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

Interpretación geométrica
- Hay 1 pto (o+) dnd la tg es // a la recta que une $f(a)$ - $f(b)$



- TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
continua en $[a,b]$
derivable en (a,b)

$$\boxed{\exists \xi \in (a,b) \ tq \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$$

- TEOREMA DE L'HOPITAL

$f, g : B_r(a) \to \mathbb{R}$
f, g derivables en $B_r(a)$
g' no se anule en $B_r(a)$
$\exists \lim_{x\to a} f = 0 \quad \exists \lim_{x\to b} g = 0$

$$\boxed{\text{Si } \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

val per $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty = f(1-\frac{g}{f})$, $(1^\infty, 0^0, \infty^\infty) = e^{g \ln f}$

* TEOREMA DE TAYLOR

$$\boxed{PT(f(x), a, n) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)}$$

$$\boxed{R_N = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}} \qquad \exists \xi \in (x,a) \ o \ (a,x)$$

$$\boxed{PT(f', a, N-1) = (PT(f, a, N))'}$$

$$\boxed{PT(F, a, N+1) = F(a) + \int_a^x PT(f, a, N)} \qquad F' = f$$

TEMA 3

* INTEGRACIÓ

- Una condició suficient i necessària per tal que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fitada en $[a,b]$ sigui integrable en $[a,b]$, és $\overline{S}_p - \underline{S}_p < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$; p: partició de $[a,b]$
- Tota funció contínua, o contínua a trossos en $[a,b]$ és integrable en $[a,b]$.

* $\boxed{\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} F_{p_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)}$

* TEOREMA DEL VALOR MIG EN INTEGRACIÓ

f contínua en $[a,b]$
g integrable en $[a,b]$
$g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$

/ $\exists \xi \in (a,b)$ tq

$$\boxed{\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g}$$

* TEOREMA DE BARROW

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fitada i integrable en $[a,b]$
- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, llavors $F(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ és contínua en $[a,b]$
- Si a més f contínua en $[a,b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$

* Regla de Barrow

$$\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a) \quad \text{on} \quad G'(x) = g(x)$$

* $N(x) = \int_{\varphi(x)}^{\gamma(x)} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{N'(x) = f(\gamma(x))\,\gamma'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}$

* APLICACIONS DE LA INTEGRAL

- Àrees funcions polars $\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)\,d\theta}$
- Volums de revolució $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$
- Longitud de corbes $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$ $\boxed{L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta}$
- Superfícies de revolució $\boxed{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$

TEMA 4

- INTEGRALS IMPRÒPIES

1a Espècie

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{CONV} \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

2a Espècie

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{CONV} \Leftrightarrow \alpha < 1}$$

Convergència absoluta

$$\boxed{\text{Si } \int_a^b |f(x)|\,dx \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ \text{CONV}}$$

- Si és convergent, però no ABS. CONV, direm que és Condicionalment convergent.

Criteris de convergència per integrals de funcions positives

* Si $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \geq \int_a^{\infty} g(x)$

- Si $\int_a^{\infty} f(x)$ CONV $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)$ CONV
- Si $\int_a^{\infty} g(x)$ DIV. $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)$ DIV

* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$$L = 0 \begin{cases} \int_a^{\infty} g(x) \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) \ \text{CONV.} \\ \int_a^{\infty} f(x) \ \text{DIV} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) \ \text{DIV} \end{cases}$$

$$L = \infty \begin{cases} \int_a^{\infty} f(x) \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^{b} g(x) \ \text{CONV} \\ \int_a^{\infty} g(x) \ \text{DIV} \Rightarrow \int_a^{b} f(x) \ \text{DIV} \end{cases}$$

$L \neq 0, \infty \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)$ i $\int_a^{\infty} g(x)$ tenen el mateix caràcter de convergència

- SÈRIES NUMÈRIQUES

* Progressió aritmètica

$a_n = a_0 + nd$ $\qquad \boxed{S_n = \frac{(n+1)(2a_0+nd)}{2}}$

* Progressió geomètrica

$a_n = \lambda^n$ $\qquad \boxed{S_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}} \qquad \boxed{\text{CONV} \Rightarrow |\lambda| < 1}$

- **Criteri general de convergència de sèries**

$(a_n)_{n \geq k} \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n \geq k} a_n$ DIV

- **Convergència absoluta**

"Idem integrals"

- Criteris de convergència per a sèries de termes no negatius

* "Els mateixos integrals"

* *Criteri d'Alambert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \begin{cases} L > 1 & \text{la serie } \sum a_n \text{ és DIV} \\ L < 1 & \text{" " CONV} \\ L = 1 & \text{No decideix} \end{cases}$$

* *Criteri de Cauchy*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = L \qquad \text{si } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

"Igual cas anterior"

* *Criteri de Raabe*

$$\lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \quad \begin{cases} L > 1 & \sum a_n \text{ CONV} \\ L < 1 & \sum a_n \text{ DIV} \\ L = 1 & \text{No decideix} \end{cases}$$

* *Criteri de la integral*

$$\boxed{\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \int_0^\infty f(x)\,dx}$$

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ i $\int_1^\infty f(x)\,dx$ tenen el mateix caràcter de conv.

* *Criteri de Prinsheim*

$$\sum a_n \text{ tq } \exists \alpha, \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = L \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha > 1 & \sum a_n \text{ CONV} \\ \alpha < 1 & \sum a_n \text{ DIV} \\ L = 0, \alpha > 1 & \sum a_n \text{ CONV} \\ L = \infty, \alpha \leq 1 & \sum a_n \text{ DIV} \end{cases}$$

* *Criteri de Leibnitz*, (per series alternades)

$$\sum (-1)^n a_n \text{ CONV} \Leftrightarrow (a_n) \to 0$$

- SERIES DE POTÈNCIES

$$\sum a_n (x-c)^n$$

És convergen en el interval $x = (c-R, c+R)$ o $[c-R, c+R]$ o $(c-R, c+R]$ o $[c-R, c+R)$

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Calculo de límites

Límites laterales

Aproximación a un pto. por defecto (izq.), por exceso (der.)
Para que exista límite tienen que existir límites laterales y que tanto el límite en el punto como los laterales sean igual a un número que no sea infinito.

Indeterminaciones : 0/0 , ∞/∞ , 0·∞ , 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} , ∞-∞

1. Funciones racionales ; g(x)/g(x) = **0/0** ó ∞/∞
   - 0/0 Se hace el cociente de polinomios.
   - ∞/∞ Se divide por el X de mayor grado.

2. Funciones irracionales ; g(x)/g(x) = **0/0** ó ∞/∞
   Multiplicamos por el conjugado de la raíz arriba y abajo

3. L'Hopital, se deriva en el numerador y en el denominador a la vez.

4. $0 \cdot \infty$ Se transforma en el primer o segundo caso. Ejemplo :

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1/g(x)} \\ o\_bien \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{1/f(x)} \end{cases}$$ Da ∞/∞ o 0/0

1. $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0} \Rightarrow \left(108^{800}\right)$

- Si el límite tiende a infinito se hace por el número e $\boxed{e = \lim_{x\to\infty}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}}$

  Donde F(x) tiende a 0.

- Si tiende a K se hace por Logaritmos neperianos

$$\lim_{x\to 0} Ln(Ln.x)^{x} = Ln.k \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\cdot Ln(Ln.x) = Ln.k$$

$$Ln.k = \lim_{x\to 0}\frac{Ln(Ln.x)}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1/x}{Ln.x}}{-1/x^{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^{2}}{x\cdot Ln.x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1/x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$Ln.k = 0 \Rightarrow e^{0} = k \Rightarrow \underline{k=1}$$

2. $\infty - \infty$ Multiplicando y dividiendo por su conjugado

Comparación de Infinitos : $\log_b n < n < n^{a} < k^{n} < n! < n^{n}$

$\boxed{n! \approx n^{n} e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

- Si tiende a 1
  Si ∃ $\lim (a_n - 1) b_n = \alpha \Rightarrow (a_n^{b_n}) = e^{\alpha}$
- Si tiende a 0 por infinitésimos equivalentes
  ∀L

Tema 1 : Sucesiones

Es una aplicación de los números naturales sobre los reales.

Sucesión acotada : $\forall n \in N \Rightarrow \exists c \in R / a_n \leq c$

Una serie converge cuando su límite existe, será divergente cuando su límite sea ± ∞.

Toda sucesión convergente está acotada y el valor de convergencia es la cota.

Carácter de una sucesión :

- Convergente : si el límite del termino general es finito
- Divergente : si el límite del termino general es + o - infinito
- Oscilante : si carece de límite (no es ninguna de las anteriores)

MONOTONIA $\forall n \in N \Rightarrow a_{n+1} > a_n$: creciente

$\forall n \in N \Rightarrow a_{n+1} < a_n$: decreciente

Si no se verifican estas dos condiciones son oscilantes
Para estudiar su monotonía

$$\forall n \in N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} >1 \Rightarrow \textit{Creciente} \\ <1 \Rightarrow \textit{Decreciente} \\ =1 \Rightarrow \textit{Iguales} \end{cases} \qquad a_n - a_{n+1} \begin{cases} >0 \Rightarrow \textit{creciente} \\ <0 \Rightarrow \textit{decreciente} \\ =0 \Rightarrow \textit{iguales} \end{cases}$$

Para calcular los límites podemos utilizar todo menos L´Hopital.

Comparación de infinitos : $\text{Log}_b\, n < n < n^a < K^n < n\,! < n^n$

Criterio de STOLZ **(bueno para eliminar factoriales o términos infinitos con relación)**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}} \quad \text{Y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{b_{n+1}-b_n}}$$

Solo si se cumple : $\{b_n\}$ es monótona creciente con Lim $\{b_n\} = \pm\infty$ **Ó**
$\{b_n\}$ es monótona creciente y lim $\{a_n\}$ = Lim $\{b_n\} = 0$.

Comparación con otras sucesiones

Dado a_n En el que no sabemos Lim a_n , Si hay un $b_n >= a_n$ en el que el Lim $b_n = K$ y también Hay un $c_n <= a_n$ en el que el Lim $c_n = K$ entonces también el Lim a_n es K.

Teorema : Sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n > 0$ para todo n perteneciente a los números reales

Si : $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ o $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ Entonces $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{b_{n+1}-b_n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{b_n}}$

Tema 2 : Series

Dada la sucesión $\{a_n\}$ la serie formada por los términos de dicha sucesión se representa como : $\sum a_n$ y corresponde a la suma de todos los términos de la sucesión.

Carácter de una serie.

- Convergente : Cuando la suma es un número real.
- Divergente : Cuando la suma da + o - infinito.
- Oscilante : Cuando no es ninguna de las anteriores.

Suma de una serie geométrica. $S_n = a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n + ar^{n+1}$

- $|R| < 1$ Serie convergente
- $R \leq -1$ Serie oscilante
- $R \geq 1$ Serie divergente

$$Suma = \frac{a_1 - a_1 R^n}{1-R} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-R} = \frac{a_1 r^n - a_1}{R-1}$$

Propiedades generales de las series numéricas

1. $\sum a_n = S$ entonces $\sum K\, a_n = K\, S$ Solo si k es nº real distinto de 0
   Si $\sum a_n$ es divergente no podemos saber nada.

2. Al suprimir añadir o modificar un número finito de términos de una serie el carácter de una serie no se modifica, si bien cuando la serie sea convergente la suma puede verse alterada.

Condición necesaria para la convergencia: Sea : $\sum a_n$ Calculamos : $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = k}$

- Si $k = 0$ la serie converge o diverge (Continuar el problema)
- Si $k \neq 0$ la serie diverge (Fin del problema)

Convergencia de series con solo términos positivos

A. **Teorema 1** :Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.

B. **Teorema 2 :** Alterando arbitrariamente el orden de los términos, descomponiendo arbitrariamente cada uno de los sumandos, no se altera el carácter de la serie, ni varía su suma.

1. **Criterio de Cauchy o de la Raíz.** Calculamos : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k}$
   - Si $k < 1$ la serie converge (Fin)
   - Si $k > 1$ la serie diverge (Fin)
   - Si $k = 1$ no sabemos (Continuar)

   Funciona con : $(\ )^n$, $(\ )^{p(n)}$

2. **Criterio de D'Alembert o del cociente.** Calculamos : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = k}$
   - Si $k < 1$ la serie converge (Fin)
   - Si $k > 1$ la serie diverge (Fin)
   - Si $k = 1$ no sabemos (Continuar)

   Funciona con : k^n, $n!$, Semifactoriales ($1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$).

3. **Criterio de Raabe.** Calculamos $\boxed{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=k}$
   - Si k < 1 la serie diverge (Fin).
   - Si k > 1 la serie converge (Fin).
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar).

   Funciona cuando el criterio de la raíz o el cociente sale 1

4. **Criterio del Logaritmo.** Calculamos $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1/a_n\right)}{\log(n)}=k}$
   - Si k < 1 la serie diverge (Fin).
   - Si k > 1 la serie converge (Fin).
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar).

   Nota : El logaritmo puede estar en cualquier base.
5. **Criterio de comparación.** Sea : $\sum a_n \leq \sum b_n$
   - Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.
   - Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
6. **Criterio de comparación por paso al límite.**

   Buscamos el carácter de $\sum a_n$ y sabemos el carácter de $\sum b_n$. Entonces : $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}} = K$
   - Si $k \neq 0$ y $k \neq \infty$ entonces ambas series tienen el mismo carácter.
   - Si $k = 0$ y si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
   - Si $k = \infty$ y si $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

   Series de comparación
   - S. Geométrica : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$
     - Si $|r| < 1$ serie convergente
     - Si $|r| \geq 1$ serie divergente
   - S. Armónica general : $1/(1^p) + 1/(2^p) + 1/(3^p) + \dots + 1/(n^p)$
     - Si $p > 1$ serie convergente
     - Si $p \leq 1$ serie divergente
7. **Criterio de Prinsheim** : Calculamos $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = k}$ *que cumpla* $\begin{cases} k \neq 0 \\ y \\ k < \pm\infty \end{cases}$
   - Si $\alpha > 1$ la serie converge
   - Si $\alpha \leq 1$ la serie diverge

   Nota : Criterio de comparación con la serie armónica general camuflado

8. Criteri integral

$\sum a_n$ te el mateix caràcter de convergència que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ on $f(n) = a_n$

- Sèries de potències

Sèries de la forma $\sum a_n (x-c)^n$

Són convergents en intervals de la forma $(-R,R)$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R]$

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Convergencia de series con términos cualesquiera

A. **Sea** : $\sum a_n$. Estudiamos : $\sum |a_n|$ y $\sum a_n$
- Si $\sum |a_n|$ converge (sus términos son positivos) decimos que $\sum a_n$ converge absolutamente y que, por lo tanto, converge (Fin)
- Si $\sum |a_n|$ diverge entonces puede ocurrir que:

    $\sum a_n$ converge. Se dice que la serie converge condicionalmente.

    $\sum a_n$ diverge. La serie es incondicionalmente divergente.

B. En toda serie absolutamente convergente se puede alterar arbitrariamente el orden de los términos sin que altere su suma.

C. En toda serie es absolutamente convergente que tenga valores positivos y negativos la serie de términos positivos y la serie de términos negativos serán convergentes por separado.

1. **Teorema de Leibniz** : una serie alternada es convergente si se cumple las siguientes condiciones :
    - Es monótona decreciente en valores absolutos y
    - El limite en el infinito es 0 (Lim $a_n = 0$)
2. **Criterio de Dirichet** (Para series alternadas) Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$

    $\sum a_n$ converge si se cumplen las siguientes condiciones, de no cumplirse es divergente :
    - Si b_n está totalmente acotada y
    - $\{c_n\}$ una sucesión monótona decreciente que convergen en 0
3. **Criterio de Abel.** Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$, entonces $\sum a_n$ converge si :
    - $\sum b_n$ de números reales, converge.
    - $\{c_n\}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada.

Operaciones con series

1. Dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergentes de sumas a y b respectivamente entonces se verifica que : $\sum a_n \pm b_n$ es también convergente y su suma es : $a \pm b$.
2. Sea la serie $\sum p_n$ formada por :

    $p_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_3 + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$

    La serie así definida en la que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes y una al menos es absolutamente convergente, en ese caso la serie $\sum p_n$ es convergente y su suma es $a \cdot b$.

Tema 3 : Funciones de variable real.

Función real de variable real

Función creciente en el intervalo I cumple : $\forall$ x , x' $\in$ I , x < x' $\Rightarrow$ f(x) $\le$ f(x')
Función decreciente en el intervalo I cumple : $\forall$ x , x' $\in$ I , x < x' $\Rightarrow$ f(x) $\ge$ f(x')
Si sustituimos el $\le$ y el $\ge$ por < y > lo hacemos estrictamente.
Función es monótona creciente o decreciente si lo es para todo R.
Función es par si : f(x) = f(-x)
Función es impar si : f(x) = -f(-x)
Función es periódica si : f(x) = f(x + n a) (Donde n es un nº entero y a es el periodo)

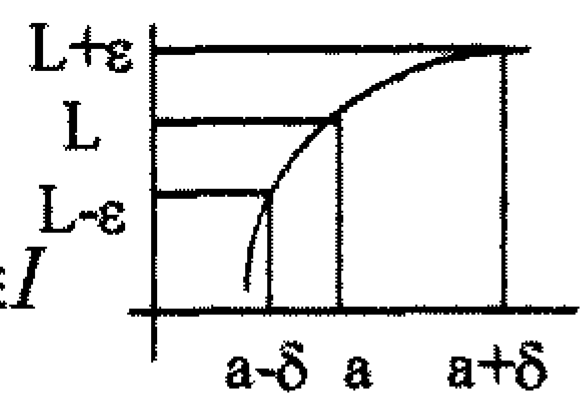
Limite de una función en un punto

Suponemos y = f(x) diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ cuando al aproximar la x indefinidamente al valor *a* la función se aproxima indefinidamente al valor *l*.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \in f(I,R)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ donde a $\in$ I

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x\in I$$



Límites laterales

Dada una función f(x) se dice que tiene limite por la derecha del punto a y se representa como : $\lim\limits_{n\to a^+} f(x) = L_1$

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L_1|<\varepsilon \quad \forall x\in I$$

Condición necesaria y suficiente para que f(x) tenga límite en a es que existan los límites por la derecha e izquierda y que coincidan.

Cálculo de límites (infinitesimos e infinitos)

Se dice que f(x) es un infinitesimo en x = a si se comporta la función de la misma manera que otra en dicho punto. Tabla de infinitesimos :

$\lim\limits_{n\to 0} \operatorname{sen}(x) = \lim\limits_{n\to 0} \operatorname{tg}(x) = \lim\limits_{n\to 0} x$

$\lim\limits_{n\to 0} \operatorname{arctg}(x) = \lim\limits_{n\to 0} \operatorname{arcsen}(x) = \lim\limits_{n\to 0} x$

$\lim\limits_{n\to 0} (1-\cos(x)) = \lim\limits_{n\to 0} \dfrac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{n\to 0} e^x = \lim\limits_{n\to 0} (1+x)$

$\lim\limits_{n\to 0} \operatorname{Ln}(1+x) = \lim\limits_{n\to 0} x$

Se en todas estas funciones se puede sustituir f(x) por x, mientras que f(x) tienda a 0.

Regla de L'Hopital Para 0/0 y ∞/∞

Lim f(x)/g(x) = 0/0 o ∞/∞ Entonces Lim f(x)/g(x) = Lim f'(x)/g'(x)

Continuidad

Es condición necesaria y suficiente para que f(x) sea continua :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Es condición necesaria y suficiente para que sea continua en un punto que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f(x) es continua en un intervalo I si es continua en todos los puntos de ese intervalo.

Discontinuidad (Tipos)

1. **Discontinuidad evitable** : Si f(x) no está definida en el punto (x=a) o el limite de la función cuando tiende a (a) no es igual a la función en dicho punto.
2. **Discontinuidad de 1ª especie** : Si en el punto existen los límites laterales pero no coinciden.
3. **Discontinuidad de 2ª especie** : Cuando alguno de los límites laterales o no existen o son infinitos.

Tema 6 : Derivabilidad

Dado y = f(x) en un intervalo I se define la derivada de f(x) representado como f'(x) como : $F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

El límit no existeix si $\lim_{h\to 0^-} \frac{\Delta f(x)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{\Delta f(x)}{h}$

Si este límite existe diremos que la función es derivable

TEHOREMA : Toda función derivable en x = x_0 es continua en dicho punto (Ojo al contrario ¡¡¡¡ NO !!!!)

Tabla de derivadas

dadas u, v = f(x) y k, m, a = constantes

PRIMITIVAS	DERIVADAS
y = k	y' = 0
y = k · u	y' = k · u'
y = u + v	y' = u' + v'
y = u · v	y' = u' · v + u · v'
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
y = u^m	y' = m · u^{m-1} · u'
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = u' / n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = u' / 2 \cdot \sqrt{u}$
y = L u	$y' = u' / u$
y = $\lg_a$ u	$y' = L_a e \frac{u'}{u} = \frac{1}{La} \frac{u'}{u}$
y = a^u	y' = a^u · La · u'
y = u^v	y'=u^v (v' Lu + v u'/u)
y = sen(u)	y' = cos(u) · u'
y = cos(u)	y' = -sen(u) · u'

PRIMITIVAS	DERIVADAS
y = tg(u)	y' = u'/$\cos^2$u y' = u' (1 + tg^2u)
y = sec (u)	y' = sec(u) · tg(u) ·u'
y = cosec(u)	y' =-cosec(u)·cotg(u)·u'
y = cotg(u)	y' = -u'/sen^2u y' = u' -(1 + $cotg^2$u)
Y = arcsen (u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Y = arccos(u)	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y = arctg(u)	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
Y = arccotg(u)	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
y = senh(u)	y' = cosh(u) · u'
y = cosh (u)	y' = senh (u) · u'
y = tgh (u)	$y' = \frac{u'}{\cosh^2 u}$
Y = argcosh(u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
Y = argsenh(u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
y = argtgh(u)	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$

Derivadas laterales

Sea f(x) una función definida en un intervalo abierto y sea x_0 un punto generico de este intervalo, llamamos derivada en x_0 por la derecha o izquierda y se representa :

Por la derecha de x_0

$F'_+(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Por la izquierda de x_0

$F'_-(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

Es condicion necesaria y suficiente para que exista la derivada, que existan y sean iguales sus derivadas laterales.

Es condición necesaria y suficiente para que exista derivada en un punto que existan derivadas laterales y que coincidan.

Casos en los que no hay derivada:

- **Punto anguloso :** Ambas derivadas existen y son finitas, pero no coinciden.
- **Punto de Inversión :** Ambas derivadas laterales son + o - con el mismo signo a la vez.
- **Punto de retroceso :** Si son infinito pero con signo distinto.

Derivada de la función inversa

Si y = f(x) que cumple que es derivable en x_0 y además que $f'(x_0)$ no es cero entonces cumple :

Que la función inversa $f^{-1}(y)$ definida como : $f^{-1}{}'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ $\qquad \left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Es derivable en x_0, de hecho son continuas en el mismo intervalo

Derivada de funciones paramétricas

Cuando no se puede despejar o es muy complicado, y respecto de x se hace la derivación implicita. Pasos :

1- Se deriva con x y con y independiente, pero las que derivemos con y ponemos dy/dx.
2- Agrupo en un lado los términos con dy/dx
3- Dejo solo el dy/dx y lo demás lo paso dividiendo.

Derivadas sucesivas

Para calcular esto de lo que se trata es derivar sucesivamente pero se puede utilizar Leibniz

Dado u = f(x), v = g(x), dos funciones que admiten derivadas sucesivas.

$$(u \cdot v)^{(n} = u^{(n} + \binom{n}{1} u^{(n-1} \cdot v' + \binom{n}{2} u^{(n-2} \cdot v'' + \binom{n}{3} u^{(n-3} \cdot v''' + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} u' \cdot v^{(n-1} + u \cdot v^{(n}$$

RECOMENDACIONES :

- Si tienes una función racional se tiene que descomponer primero, de no tener nada en el numerador se trabaja mucho mejor ~~son~~ subiéndolo todo de la siguiente forma : $1/x = x^{-1}$.
- Se suele pasar todo a sen o cos, sumandole $\pi/2$

Tema 7 :Series de potencias

Se llama serie potencial a una serie funcional de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+....$
En toda serie entera existe un cierto valor tal que la serie converge para todo x existente para un cierto valor. $\forall x \in (-R,R)$, para calcular este intervalo se utilizan los criterios de Dalembert o del cociente, Cauchy o de la raíz

Desarrollo en serie de Taylor
$x=a$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+......+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...... \quad + O\left((x-a)^N\right)$$

Desarrollo en serie de Mc Laurin : Es igual que Taylor pero con x = 0

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+......+\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n+.....$$

Resto de Lagrange un polinomio de Taylor de grado n :

$$Rn=\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \xi \in (x,a) \text{ o } (a,x)$$

Serie Binómica

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\binom{m}{4}x^4+......+\binom{m}{n}x^n$$ rango convergencia [-1,1]

Operaciones con series de potencias Dado $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$

$f(k\cdot z) = \sum a_n k^n z^n$ $\qquad$ $f(x^p) = \sum a_n k^{np}$

$f(x) \pm g(x) = \sum (a_n \pm b_n) x^n$ $\qquad$ $f(x)\cdot g(x) = (\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n)$

Estas operaciones pueden cambiar el intervalo de convergencia.
Si es una suma el intervalo es la unión de los intervalos.

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-....+(-1)^n(x-1)^n \qquad 0<x<2$$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}-....+\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} \qquad 0<x\le 2$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....+\frac{x^n}{n!} \qquad -00<x<00$$

$$\text{sen}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -00<x<00$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad -00<x<00$$

$$arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+....+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad -1\le x\le 1$$

$$ar\,\text{sen}(x)=x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+....+\frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} \qquad -1\le x\le 1$$

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} \qquad -1\le x\le 1$$

$$tg\,x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\ ...$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ ...$$

Tema 8 :Representación Gráfica de funciones

1. **Dominio** (estudiar las siguientes funciones problemáticas)
   a) Racionales : $F(x) = P(x) / Q(x)$ Entonces $D = R - \{ \text{Puntos que } Q(x) = 0 \}$
   b) Raíces : $F(x) = P(x)^{1/2}$ Entonces $D = \{ x / P(x) >= 0 \}$
   c) Logaritmos : $F(x) = \text{Log } P(x)$ Entonces $D = \{ x / P(x) > 0 \}$

2. **Puntos de corte con ejes (x e y)**
   - Corte con eje X : $0 = F(x)$ Puntos $(x', 0)$
   - Corte con eje Y : $y = F(0)$ Puntos $(0, y')$

3. **Signo**
   El signo que toma la función para determinados valores, hay que estudiarlo entre los puntos raros del dominio y entre los puntos de corte del eje X

4. **Simetrías**
   - PAR (Respecto del eje X) : $F(x) = F(-x)$
   - IMPAR (Respecto del origen) : $F(x) = -F(-x)$

5. **Periodicidad**

6. **Asíntotas**
   - <u>Verticales :</u> Se calcula el límite de la función cuando tiende a puntos raros en los que no existe función y si da + 0 - infinito es una asíntota.
   - <u>Horizontales :</u> Se calcula si el limite de la función cuando tiende a infinito o menos infinito da un número finito, en ese caso hay asíntota en dicho número.
   - <u>Oblicuas :</u> (Solo pueden existir si no hay horizontales, para los dos lados)
     Se calcula $m = \text{Lim } F(x)/x$ y $n = \text{Lim } F(x) - mx$
     Si se puede calcular todo, la asíntota está en $y = mx + n$

7. **Crecimiento y decrecimiento**
   $F'(x) > 0$ Crece $F'(x) < 0$ Decrece
   También se puede estudiar esto a partir de mínimos, máximos y asíntotas.

8. **Máximos y mínimos**
   - Hacer $F'(x)$ b) $F'(x) = 0$ (Despejo x)   c) Hacer $F''(x)$
   - Si $F''(x_0) > 0$ Es un mínimo (la curva está por encima)
     Si $F''(x_0) < 0$ Es un máximo (la curva está por debajo)

9. **Puntos de inflexión**
   - $F''(x) = 0$ (Despejar x)   b) Calcular $F'''(x)$
   - Si $F'''(x_0) = 0$ No hay inflexión
     Si $F'''(x_0) <>$ Hay un punto de inflexión

10. **Concavidad y convexidad**
    $F''(x) > 0$ Cóncavo (U) $F''(x) < 0$ Convexo (Λ)

11. **Recorrido**
    Estudio de los valores que puede tener la función

Cuadro de integrales inmediatas

$\int dx = x + c$	$\int u' dx = u + c$
$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{u'}{u} dx = Lu + c$
$\int u' e^u dx = e^u + c$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{La} + c$
$\int u' \operatorname{sen}(u) dx = -\cos(u) + c$	$\int u' \cos(u) dx = \operatorname{sen}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\cos^2 u} = \int u'(1 + \operatorname{tg}^2(u)) dx = \operatorname{tg}(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen}(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\operatorname{sen}^2 u} = \int u'(1 + \cot g^2(u)) dx = -\cot g(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{1+u^2} = \operatorname{arctg}(u) + c$
$\int u' sh(u) = ch(u) + c$	$\int u' ch(u) = sh(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{\sqrt{1+u^2}} = \arg sh(u) + c$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2-1}} = \arg ch(u) + c$
$\int \frac{u' dx}{1-u^2} = \arg th(u) + c$	

Sustituciones recomendadas

Función	Cambio	Cálculos
$\int R(x, e^x) dx$	$e^x = t$	$x = L\,t$; $dx = \frac{dt}{t}$
$\int R(x, Lx) dx$	$Lx = t$	$x = e^t$; $dx = e^t\,dt$
$\int R(x, \operatorname{arctg}(x)) dx$	$\operatorname{arctg}(x) = t$	$x = \operatorname{tg}(t)$; $dx = \frac{dt}{\cos^2 x}$
$\int R(x, \operatorname{arcsen}(x)) dx$	$\operatorname{arcsen}(x) = t$	$x = \operatorname{sen}(t)$; $dx = \cos(t)\,dt$
$\int R(x, \arccos(x)) dx$	$\arccos(x) = t$	$x = \cos(t)$; $dx = -\operatorname{sen}(t)\,dt$
$\int R(x, \arg th(x)) dx$	$\operatorname{argth}(x) = t$	$x = th(t)$; $dx = \frac{dt}{ch^2 x}$
$\int R(x, \arg sh(x)) dx$	$\operatorname{argsh}(x) = t$	$x = sh(t)$; $dx = ch(t)\,dt$
$\int R(x, \arg ch(x)) dx$	$\operatorname{argch}(x) = t$	$x = ch(t)$; $dx = sh(t)\,dt$

Sustituciones en integrales de funciones trigonométricas circulares

Si es impar en SEN X	$\cos x = t$	$x = \arccos(t)$; $dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}$

FUNCIONES RACIONALES

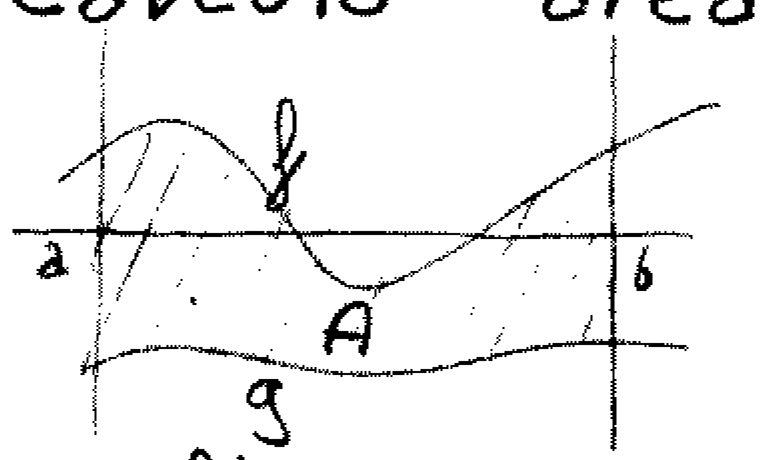
$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{Bx+C}{x^2-bx+c} + \cdots$$

Si es impar en COS X	sen x = t	x = arcsen(t); $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$
Si es par en SEN y en COS	tg x = t	x = arctg(t) ; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$; $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Si no es ninguno de los casos anteriores : CAMBIO GENERAL	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$	x = 2 arctg(t) ; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$; $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
Sustituciones en integrales de funciones hiperbólicas		
Si es impar en SH X	ch x = t	x = argch(t); $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$; $sh(x) = \sqrt{t^2-1}$
Si es impar en CH X	sh x = t	x = argsh(t); $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$; $ch(x) = \sqrt{t^2+1}$
Si es par en SH y en CH	th x = t	x = argch(t) ; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$; $\operatorname{sen}(x) = \cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
Si no es ninguno de los casos anteriores : CAMBIO GENERAL	$th\dfrac{x}{2} = t$	x = 2 argth(t) ; $dx = \dfrac{2dt}{1-t^2}$; $sh(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\cos(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

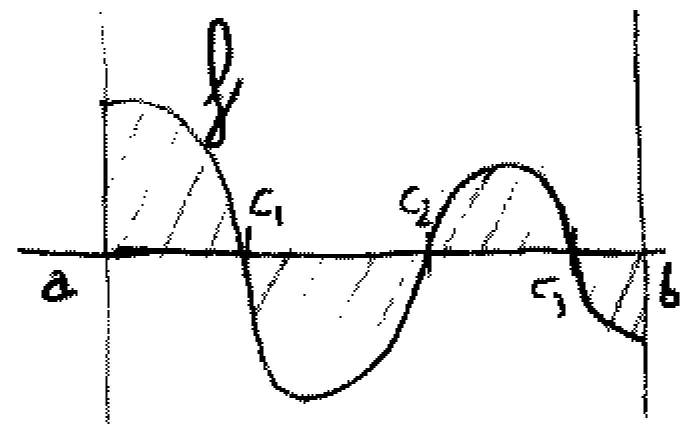
Formula de integración por partes

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

- Cálculo areas



$$A = \int_a^b f - g$$



$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f - \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^{c_3} f - \int_{c_3}^{b} f$$

- Cálculo Volúmenes

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

- Cálc. Sup. Revolución

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

- En polares $r(\varphi)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

- Longitud de curvas
  - Coord. Cartesianas $L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$
  - Coord. Polares $L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$

Varios

- **Funciones Hiperbólicas**

$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \operatorname{senh}^2(x) - \cosh^2(x) = 1$

$\arg \operatorname{tgh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$\operatorname{senh}(x)' = \cosh(x)$ $\qquad \cosh(x)' = \operatorname{senh}(x)$ $\qquad$ ¡¡ Ojo Sin Signo !!

- **Binomio de Newton**

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m$$

- **Ecuaciones de la recta**

m = pendiente ; Por la derivada ó con dos puntos m = $(x_0 - x_1) / (y_0 - y_1)$
(x_0, y_0) = es un punto
Ecuación tangente = $(y - y_0) = m\,(x - x_0)$
Ecuación tangente = $(y - y_0) = (1/m)\,(x - x_0)$ Perpendicular

- **Combinatoria**

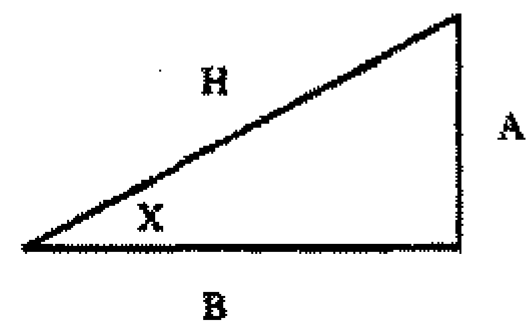
$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ $\qquad$ Propiedades : $\binom{m}{0} = 1$ y $\quad 0! = 1$

$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ $\qquad \binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

- **Reglas de los logaritmos** (En cualquier base)

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
$\log a \cdot b = \log a + \log b$
$\log a/b = \log a - \log b$
$\log a^b = b \log a$
$\log \sqrt[b]{a} = 1/b \log a$

- **Trigonometría** $\pi = 180° = \pi$ Rad



$\operatorname{sen} x = \dfrac{A}{H}$ $\cos x = \dfrac{B}{H}$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{A}{B}$

$\cos ecx = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{H}{A}$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{H}{B}$ $\cot gx = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{B}{A}$

	0°	30°	45°	60°	90°
sen x	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Relaciones ¿estudiarlas ? ? ? ?

Complementaria : sen($\pi/2$ - x) = cos x ; cos ($\pi/2$-x) = sen x

Suplementarios : sen(π-x) = -sen x ; cos (π - x) = -cos x

Opuestos : sen -x = -sen x ; cos -x = cos x

Relación fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Dividiéndola por $\operatorname{sen}^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Dividiéndola por $\cos^2 x$ $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

Transformaciones al ángulo mitad

$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

Transformaciones al ángulo doble

$\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Transformaciones en suma

$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Transformaciones en producto

$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}$